

СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ВЛАСОВА В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ

Геннадий Владимирович Демиденко¹
Кристина Дмитриевна Ивлева²

^{1,2}Новосибирский государственный университет
Новосибирск, Россия,

¹g.demidenko@g.nsu.ru: <https://orcid.org/0000-0001-6338-7247>

²k.ivleva@g.nsu.ru

Аннотация

В работе рассматриваются смешанные краевые задачи в четверти плоскости для системы Власова, описывающей малые изгибно-крутильные колебания упругого стержня. Получен критерий выполнимости условия Лопатинского в терминах коэффициентов граничных операторов. Доказаны существование и единственность решений в анизотропных весовых соболевских пространствах $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$, получены точные оценки решений в интегральных нормах и построены явные формулы решений.

Ключевые слова и фразы

система Власова, псевдогиперболические системы, смешанные краевые задачи, анизотропные весовые соболевские пространства.

Источник финансирования

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение № 075-15-2025-349 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.)

Для цитирования

Демиденко Г. В., Ивлева К. Д. Смешанные краевые задачи для системы Власова в четверти плоскости // *Математические труды*, 2026, Т. 29, № 3, С. 19-46. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-3-19-46

Mixed boundary value problems for the Vlasov system in the quarter-plane

Gennadii V. Demidenko¹, Kristina D. Ivleva²,

^{1,2}Novosibirsk State University,
Novosibirsk, Russia

¹g.demidenko@g.nsu.ru:<https://orcid.org/0000-0001-6338-7247>

²k.ivleva@g.nsu.ru

Abstract

The paper considers mixed boundary value problems in a quarter-plane for the Vlasov system describing small bending-torsional vibrations of an elastic rod. A criterion for the satisfaction of the Lopatinskii condition is obtained in terms of coefficients of the boundary operators. The existence and uniqueness of solutions in anisotropic weighted Sobolev spaces $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$ are proved, sharp estimates of solutions in integral norms are obtained, and explicit formulas for the solutions are constructed.

Keywords

Vlasov system, pseudohyperbolic systems, mixed boundary value problems, anisotropic weighted Sobolev spaces.

Funding

The work is supported by the Mathematical Center in Akademgorodok under Agreement No. 075-15-2025-349 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

For citation

Demidenko G. V., Ivleva K. D., Mixed boundary value problems for the Vlasov system in the quarter-plane // *Mat. Trudy*, 2026, V. 29, N. 3, P. 19-46. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-3-19-46

§ 1. Введение

Теория дифференциальных уравнений и систем, не разрешенных относительно старшей производной по времени, является важным и активно развивающимся разделом современной теории уравнений с частными производными. Возникновение этого направления неразрывно связано с фундаментальными исследованиями С. Л. Соболева [1], в связи с чем уравнения данного класса часто называют уравнениями соболевского типа.

К такому классу относится система уравнений Власова, возникающая при математическом моделировании изгибно-крутильных колебаний тонкого упругого стержня [2, 3]:

$$\begin{pmatrix} 1 - \alpha_1 D_x^2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 - \alpha_2 D_x^2 \end{pmatrix} D_t^2 u + \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} D_x^4 u = f(t, x). \quad (1.1)$$

Особенностью этой системы является то, что она не разрешена относительно старшей производной по времени, а матричный дифференциальный оператор при ней содержит производные по пространственным переменным. Вследствие этого данная система не принадлежит к классическим типам уравнений. Согласно классификации, введенной в монографии [4], рассматриваемая система (1.1) принадлежит к классу псевдогиперболических систем уравнений.

Целью данной работы является исследование смешанных краевых задач для системы Власова в четверти плоскости. Основное внимание уделяется доказательству однозначной разрешимости краевых задач и получению оценок решения в анизотропных соболевских пространствах с экспоненциальным весом.

§ 2. Постановка задачи. Условие Лопатинского

Рассмотрим смешанную краевую задачу для системы Власова в четверти плоскости $t > 0$, $x > 0$:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 - \alpha_1 D_x^2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 - \alpha_2 D_x^2 \end{pmatrix} D_t^2 u + \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} D_x^4 u = f(t, x), \\ \mathcal{B}(D_x)u|_{x=0} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad D_t u|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

где вектор-функция $u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x))^T$, правая часть $f(t, x) = (f_1(t, x), f_2(t, x))^T$, коэффициенты системы удовлетворяют условиям: $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $0 \leq \varepsilon < 1$, $c_1, c_2 > 0$. Эта система является не разрешенной относительно старшей производной по времени и входит в класс псевдогиперболических систем [4].

Граничные условия $\mathcal{B}(D_x)u|_{x=0} = 0$ задаются в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}D_x u_1|_{x=0} = 0, \\ a_{21}u_1 + a_{22}D_x u_1|_{x=0} = 0, \\ b_{11}u_2 + b_{12}D_x u_2|_{x=0} = 0, \\ b_{21}u_2 + b_{22}D_x u_2|_{x=0} = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Коэффициенты a_{jk}, b_{jk} — вещественные постоянные.

Применим формально преобразование Лапласа по времени $t \rightarrow \tau$ к системе (2.1)–(2.2). Введем функции образов:

$$v(\tau, x) = \mathcal{L}[u](\tau, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\tau t} u(t, x) dt,$$

$$g(\tau, x) = \mathcal{L}[f](\tau, x),$$

где $\tau = \sigma + i\eta$ — комплексный параметр преобразования, причем $\operatorname{Re} \tau = \sigma > \gamma > 0$. С учетом нулевых начальных данных, задача в образах Лапласа принимает вид краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром:

$$\begin{cases} \tau^2 \begin{pmatrix} 1 - \alpha_1 D_x^2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 - \alpha_2 D_x^2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} D_x^4 v = g(\tau, x), & x > 0, \\ a_{j1} v_1 + a_{j2} D_x v_1|_{x=0} = 0, & b_{j1} v_2 + b_{j2} D_x v_2|_{x=0} = 0, & j = 1, 2. \end{cases} \quad (2.3)$$

Будем искать решение задачи (2.3) в пространстве $W_2^4(\mathbb{R}_+)$ для любого τ такого, что $\operatorname{Re} \tau > 0$.

Для задачи (2.3) предполагается выполнение условия Лопатинского (см., например, [4, 9]). Как будет показано далее в Лемме 1, это условие эквивалентно выполнению неравенств:

$$\det(a_{ij}) \neq 0, \quad \det(b_{ij}) \neq 0.$$

Для дальнейшего анализа сведем систему (2.3) к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Введем блочный вектор неизвестных $y = (y^1, y^2)^T$ размерности 8×1 , компоненты которого имеют вид:

$$y^1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ D_x v_1 \\ D_x^2 v_1 \\ D_x^3 v_1 \end{pmatrix}, \quad y^2 = \begin{pmatrix} y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ D_x v_2 \\ D_x^2 v_2 \\ D_x^3 v_2 \end{pmatrix}.$$

Запишем исходную систему уравнений в терминах y :

$$\begin{cases} \tau^2(y_1 - \alpha_1 y_3) + \varepsilon \tau^2 y_5 + c_1 D_x y_4 = g_1(\tau, x), \\ \varepsilon \tau^2 y_1 + \tau^2(y_5 - \alpha_2 y_7) + c_2 D_x y_8 = g_2(\tau, x). \end{cases}$$

Выразим производные $D_x y_4$ и $D_x y_8$:

$$D_x y_4 = -\frac{\tau^2}{c_1} y_1 + \frac{\tau^2 \alpha_1}{c_1} y_3 - \frac{\varepsilon \tau^2}{c_1} y_5 + \frac{g_1(\tau, x)}{c_1},$$

$$D_x y_8 = -\frac{\varepsilon \tau^2}{c_2} y_1 - \frac{\tau^2}{c_2} y_5 + \frac{\tau^2 \alpha_2}{c_2} y_7 + \frac{g_2(\tau, x)}{c_2}.$$

Таким образом, при фиксированном τ , $\operatorname{Re} \tau > 0$, краевая задача (2.3) эквивалентна следующей задаче на полуоси:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = A(\tau) y + F(\tau, x), & x > 0, \\ B y|_{x=0} = 0, \\ y(\tau, x) \in W_2^1(\mathbb{R}_+), \end{cases} \quad (2.4)$$

где вектор правой части $F(\tau, x) = \left(0, 0, 0, \frac{g_1(\tau, x)}{c_1}, 0, 0, 0, \frac{g_2(\tau, x)}{c_2}\right)^T$, а матрица системы $A(\tau)$ размера 8×8 имеет блочную структуру $A(\tau) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\tau^2}{c_1} & 0 & \frac{\alpha_1 \tau^2}{c_1} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\varepsilon \tau^2}{c_1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\varepsilon \tau^2}{c_2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\tau^2}{c_2} & 0 & \frac{\alpha_2 \tau^2}{c_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем будет показано, что для спектра матрицы $A(\tau)$, $\operatorname{Re} \tau > 0$, имеет место дихотомия относительно мнимой оси, при этом число собственных значений, лежащих в левой полуплоскости равно 4 (см. Лемму 3).

Граничные условия (2.2) задаются матрицей B размера 4×8 :

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Однозначная разрешимость краевой задачи (2.4) при любых ограниченных $F(\tau, x)$ эквивалентна выполнению условия Лопатинского:

$$\det(BT_-(\tau)) \neq 0 \quad \text{для всех } \operatorname{Re} \tau > 0. \quad (2.5)$$

Здесь $T_-(\tau)$ — матрица размера 8×4 , столбцами которой являются векторы, образующие базис в максимальном инвариантном подпространстве, соответствующем собственным значениям матрицы $A(\tau)$ с отрицательной вещественной частью.

Лемма 1. Условие Лопатинского (2.5) эквивалентно выполнению неравенств:

$$\det(a_{ij}) \neq 0, \quad \det(b_{ij}) \neq 0. \quad (2.6)$$

Доказательство. Действительно, поскольку 3, 4, 7 и 8 столбцы матрицы B состоят только из нулей, при умножении B на $T_-(\tau)$ соответствующие строки матрицы $T_-(\tau)$ не вносят вклада. Это позволяет ввести редуцированные матрицы 4×4 :

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{T}_-(\tau) = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} \\ w_{51} & w_{52} & w_{53} & w_{54} \\ w_{61} & w_{62} & w_{63} & w_{64} \end{pmatrix},$$

такие что $BT_-(\tau) = \tilde{B}\tilde{T}_-(\tau)$. Матрица $\tilde{B}$ имеет блочно-диагональный вид, поэтому её определитель равен произведению определителей диагональных блоков. Следовательно, из условия $\det(BT_-(\tau)) \neq 0$ получаем:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{и} \quad \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \neq 0.$$

□

Замечание 1. В дальнейшем будем предполагать, что

$$\|(BT_-(\tau))^{-1}\| \leq c(\gamma_0) < \infty, \quad (2.7)$$

при $\operatorname{Re} \tau \geq \gamma_0 > 0$.

§ 3. Основной результат

Для формулировки основных результатов введем необходимые функциональные пространства. Будем рассматривать функции, заданные в четверти плоскости $\mathbb{R}_{++}^2 = \{(t, x) \mid t > 0, x > 0\}$.

Приведем необходимые определения анизотропных соболевских пространств (см., например, [4, 5, 6]).

Определение 1. Функция $u(t, x)$ принадлежит анизотропному соболевскому пространству $W_2^{l_1, l_2}(G)$, где $l_1, l_2 > 0$, $G \subseteq \mathbb{R}^2$, если существуют обобщенные производные $D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} u(t, x)$ в области G при мультииндексе $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ таком, что

$$\frac{\alpha_1}{l_1} + \frac{\alpha_2}{l_2} \leq 1,$$

при этом $D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} u(t, x) \in L_2(G)$. Норма в этом пространстве имеет вид:

$$\|u(t, x), W_2^{l_1, l_2}(G)\| = \sum_{\alpha: \frac{\alpha_1}{l_1} + \frac{\alpha_2}{l_2} \leq 1} \|D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} u(t, x), L_2(G)\|.$$

Определение 2. Функция $f(t, x)$ принадлежит анизотропному соболевскому пространству $W_2^{0,1}(G)$ (или $W_2^{1,0}(G)$), если $f(t, x) \in L_2(G)$, существует обобщенная производная $D_x f(t, x)$ ($D_t f(t, x)$) в G , при этом $D_x f(t, x) \in L_2(G)$ (или $D_t f(t, x) \in L_2(G)$ соответственно). Полагаем

$$\|f(t, x), W_2^{0,1}(G)\| = \|f(t, x), L_2(G)\| + \|D_x f(t, x), L_2(G)\|,$$

$$\|f(t, x), W_2^{1,0}(G)\| = \|f(t, x), L_2(G)\| + \|D_t f(t, x), L_2(G)\|.$$

Определение 3. Функция $u(t, x)$ принадлежит анизотропному соболевскому пространству с экспоненциальным весом $W_{2,\gamma}^{l_1,l_2}(\mathbb{R}_{++}^2)$, $\gamma > 0$, если функция $e^{-\gamma t} u(t, x) \in W_2^{l_1,l_2}(\mathbb{R}_{++}^2)$. Норма определяется следующим равенством:

$$\|u(t, x), W_{2,\gamma}^{l_1,l_2}(\mathbb{R}_{++}^2)\| = \|e^{-\gamma t} u(t, x), W_2^{l_1,l_2}(\mathbb{R}_{++}^2)\|.$$

Определение 4. Будем говорить, что $u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x))^T$ принадлежит $W_{2,\gamma}^{l_1,l_2}(G)$, если $u_j(t, x) \in W_{2,\gamma}^{l_1,l_2}(G)$, $j = 1, 2$. Полагаем

$$\|u(t, x), W_{2,\gamma}^{l_1,l_2}(G)\| = \|u_1(t, x), W_{2,\gamma}^{l_1,l_2}(G)\| + \|u_2(t, x), W_{2,\gamma}^{l_1,l_2}(G)\|.$$

Основным результатом работы является доказательство корректности поставленной задачи (2.1)–(2.2) в анизотропных весовых соболевских пространствах $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$.

Теорема 1. Пусть выполнено условие Лопатинского для краевой задачи (2.1)–(2.2), тогда существует $\gamma_1 > 0$ такое, что для любой $f(t, x) \in W_{2,\gamma}^{1,1}(\mathbb{R}_{++}^2)$, $\gamma > \gamma_1$, краевая задача (2.1)–(2.2) однозначно разрешима в классе вектор-функций $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$, таких, что $D_t^2 D_x^2 u(t, x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^2)$, и выполняется оценка:

$$\|u(t, x), W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)\| + \|D_t^2 D_x^2 u(t, x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^2)\| \leq c(\gamma_1) \|f(t, x), W_{2,\gamma}^{1,1}(\mathbb{R}_{++}^2)\|,$$

где константа $c(\gamma_1) > 0$ не зависит от функции $f(t, x)$.

Доказательство теоремы будет основано на изучении краевой задачи (2.3) при любом фиксированном параметре τ , $\operatorname{Re} \tau > \gamma$. Вначале мы построим решение задачи (2.3) в интегральном виде и получим его оценки в норме пространства $W_2^4(\mathbb{R}_+)$, учитывая зависимость различных констант от параметра τ . Затем, используя обобщенную теорему Пэли-Винера, установим условия, при которых к функции $v(\tau, x)$ можно применять обратное преобразование Лапласа, получим при этом решение исходной краевой задачи $u(t, x) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$, $\gamma > 0$.

Приведем необходимые для дальнейшего сведения о свойствах преобразования Лапласа (см., например, [7]).

Определение 5. Пусть функция $u(t, x)$ определена при $t > 0$ и локально суммируема по t , при этом $e^{-\sigma t}u(t, x) \in L_1(\mathbb{R}_+)$ для каждого фиксированного x . Тогда функция

$$\mathcal{L}[u](\tau, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\tau t} u(t, x) dt, \quad \tau = i\eta + \sigma, \quad \sigma > \gamma > 0,$$

называется преобразованием Лапласа функции $u(t, x)$ по переменной t . Оператор, сопоставляющий $u(t, x)$ функцию $\mathcal{L}[u](\tau, x)$, называется оператором Лапласа и обозначается $\mathcal{L}$.

Определение 6. Обозначим через $\tilde{L}_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+)$ пространство функций $v(\tau, x)$ комплексной переменной $\tau = \sigma + i\eta$ и вещественной переменной $x > 0$, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) для почти всех $x \in \mathbb{R}_+$ функция $v(\tau, x)$ является аналитической по τ в правой полуплоскости $\mathbb{C}_\gamma^+ = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \tau > \gamma\}$;
- 2) $\sup_{\sigma > \gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |v(\sigma + i\eta, x)|^2 dx d\eta < \infty$.

Норму в пространстве $\tilde{L}_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+)$ определим следующим образом:

$$\sup_{\sigma > \gamma} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |v(\sigma + i\eta, x)|^2 dx d\eta \right)^{1/2} < \infty.$$

Определение 7. Для описания образа интегрального оператора Лапласа $\mathcal{L}$ пространства $W_{2,\gamma}^{l_1,l_2}(\mathbb{R}_{++}^2)$, где $l_1, l_2 > 0$, определим пространство $\widetilde{W}_2^{l_1,l_2}(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+)$ как множество функций $v(\tau, x) \in \tilde{L}_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\sup_{\sigma > \gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |i\eta + \sigma|^{2\alpha_1} |D_x^{\alpha_2} v(i\eta + \sigma, x)|^2 dx d\eta < \infty, \quad \frac{\alpha_1}{l_1} + \frac{\alpha_2}{l_2} \leq 1.$$

Данное пространство является линейным нормированным пространством с нормой:

$$\sum_{\alpha} \sup_{\sigma > \gamma} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |i\eta + \sigma|^{2\alpha_1} |D_x^{\alpha_2} v(i\eta + \sigma, x)|^2 dx d\eta \right)^{\frac{1}{2}},$$

где суммирование ведется по всем мультииндексам $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, удовлетворяющим $\frac{\alpha_1}{l_1} + \frac{\alpha_2}{l_2} \leq 1$.

Обобщенная теорема Пэли-Винера. Интегральный оператор Лапласа $\mathcal{L}$ отображает пространство функций из $W_{2,\gamma}^{l_1,l_2}(\mathbb{R}_{++}^2)$, удовлетворяющих нулевым начальным данным

$$D_t^k u|_{t=0} = 0, \quad k = 0, \dots, l_1 - 1,$$

на пространство $\widetilde{W}_2^{l_1,l_2}(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+)$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно.

§ 4. Спектральный анализ

Для построения решения задачи (2.4) необходимо исследовать спектр матрицы $A(\tau)$. Найдём её характеристический многочлен.

Пусть $w = (w_1, \dots, w_8)^T$ — собственный вектор, удовлетворяющий уравнению $A(\tau)w = \lambda w$. Из структуры матрицы вытекают соотношения:

$$w_2 = \lambda w_1, \quad w_3 = \lambda^2 w_1, \quad w_4 = \lambda^3 w_1,$$

а также

$$w_6 = \lambda w_5, \quad w_7 = \lambda^2 w_5, \quad w_8 = \lambda^3 w_5.$$

Четвертое и восьмое уравнения системы $A(\tau)w = \lambda w$ принимают вид:

$$\begin{aligned} (c_1 \lambda^4 + \tau^2(1 - \alpha_1 \lambda^2))w_1 + \varepsilon \tau^2 w_5 &= 0, \\ \varepsilon \tau^2 w_1 + (c_2 \lambda^4 + \tau^2(1 - \alpha_2 \lambda^2))w_5 &= 0. \end{aligned}$$

Приравнявая определитель полученной системы 2×2 к нулю, получаем характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} L(\tau, \lambda) &= \det(A(\tau) - \lambda I) \\ &= [c_1 \lambda^4 + \tau^2(1 - \alpha_1 \lambda^2)][c_2 \lambda^4 + \tau^2(1 - \alpha_2 \lambda^2)] - \varepsilon^2 \tau^4 = 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Сделаем замену $\mu = \lambda^2$. Характеристическое уравнение переписется в виде:

$$\begin{aligned} c_1 c_2 \mu^4 - \tau^2(\alpha_1 c_2 + \alpha_2 c_1) \mu^3 + (\tau^2(c_1 + c_2) + \alpha_1 \alpha_2 \tau^4) \mu^2 \\ - \tau^4(\alpha_1 + \alpha_2) \mu + \tau^4(1 - \varepsilon^2) = 0. \end{aligned}$$

Так как $\mu = \lambda^2$, уравнение имеет 8 корней $\{\lambda_j\}$. Ниже мы покажем, что для спектра матрицы имеет место дихотомия относительно мнимой оси: 4 корня лежат в левой полуплоскости ($\operatorname{Re} \lambda_j < 0$) и 4 корня в правой ($\operatorname{Re} \lambda_j > 0$).

Лемма 2. При $\operatorname{Re} \tau \geq \gamma > 0$ характеристическое уравнение (4.1) не имеет чисто мнимых корней.

Доказательство. Предположим противное: пусть существует чисто мнимый корень $\lambda = i\omega$, где $\omega \in \mathbb{R}$ и $\omega \neq 0$.

Подставляя $\lambda = i\omega$ в характеристическое уравнение

$$L(\tau, \lambda) = [c_1\lambda^4 + \tau^2(1 - \alpha_1\lambda^2)][c_2\lambda^4 + \tau^2(1 - \alpha_2\lambda^2)] - \varepsilon^2\tau^4 = 0,$$

получаем:

$$[c_1\omega^4 + \tau^2(1 + \alpha_1\omega^2)][c_2\omega^4 + \tau^2(1 + \alpha_2\omega^2)] - \varepsilon^2\tau^4 = 0.$$

Для упрощения выкладок введем следующие обозначения:

$$X_1 = c_1\omega^4 > 0, \quad X_2 = c_2\omega^4 > 0, \quad Y_1 = 1 + \alpha_1\omega^2 > 1, \quad Y_2 = 1 + \alpha_2\omega^2 > 1.$$

Переходя к новым обозначениям, имеем

$$(X_1 + \tau^2 Y_1)(X_2 + \tau^2 Y_2) - \varepsilon^2 \tau^4 = 0.$$

Раскрывая скобки и группируя слагаемые по степеням τ , приходим к уравнению:

$$(Y_1 Y_2 - \varepsilon^2) \tau^4 + (X_1 Y_2 + X_2 Y_1) \tau^2 + X_1 X_2 = 0.$$

Введем коэффициенты A, B и C :

$$A = Y_1 Y_2 - \varepsilon^2, \quad B = X_1 Y_2 + X_2 Y_1, \quad C = X_1 X_2.$$

Заметим, что $B > 0$ и $C > 0$. Так как по условию задачи $0 \leq \varepsilon < 1$ и $Y_1, Y_2 > 1$, то $A > 1 - \varepsilon^2 > 0$. Таким образом, мы получили уравнение с положительными коэффициентами:

$$A\tau^4 + B\tau^2 + C = 0.$$

Параметр $\tau = \sigma + i\eta$, где $\sigma \geq \gamma > 0$. Тогда $\tau^2 = a + ib$, где $a = \sigma^2 - \eta^2$ и $b = 2\sigma\eta$. Подставив это в уравнение, имеем

$$A(a^2 - b^2 + 2iab) + Ba + iBb + C = 0.$$

Выделяя мнимую часть уравнения, имеем

$$\operatorname{Im}(A\tau^4 + B\tau^2 + C) = 2Aab + Bb = b(2Aa + B) = 0.$$

Поскольку $\sigma > 0$, равенство $b = 2\sigma\eta = 0$ возможно только при $\eta = 0$. В этом случае $\tau^2 = \sigma^2 > 0$, и уравнение $A\sigma^4 + B\sigma^2 + C = 0$ не имеет решений, так как все коэффициенты и σ положительны.

Следовательно, должно выполняться условие $2Aa + B = 0$, т. е. $a = -B/(2A) < 0$. Тогда, приравняв к нулю вещественную часть, имеем

$$Ab^2 = Aa^2 + Ba + C.$$

Подставляя $a = -B/(2A)$, получаем:

$$Ab^2 = \frac{4AC - B^2}{4A}.$$

Обозначим $\Delta = B^2 - 4AC$. Раскрывая выражения для X и Y , получаем:

$$\Delta = (X_1Y_2 - X_2Y_1)^2 + 4\varepsilon^2 X_1X_2 > 0.$$

Тогда $Ab^2 = -\frac{\Delta}{4A} < 0$. Поскольку $A > 0$, это означает, что $b^2 < 0$, что невозможно для вещественного значения $b = 2\sigma\eta$. Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

Лемма 3. При $|\tau| \rightarrow \infty$ корни характеристического уравнения (4.1) разделяются на две группы:

- 1) модули которых растут пропорционально $|\tau|$;
- 2) модули которых ограничены.

Доказательство. 1) Разделим уравнение (4.1) $L(\tau, \lambda) = 0$ на τ^8 и сделаем замену $z = \mu/\tau^2 = \lambda^2/\tau^2$:

$$\left(c_1z^2 - \alpha_1z + \frac{1}{\tau^2}\right) \left(c_2z^2 - \alpha_2z + \frac{1}{\tau^2}\right) - \frac{\varepsilon^2}{\tau^4} = 0.$$

При $|\tau| \rightarrow \infty$ предельное уравнение $z^2(c_1z - \alpha_1)(c_2z - \alpha_2) = 0$ имеет ненулевые корни $z_1 = \alpha_1/c_1, z_2 = \alpha_2/c_2$. Это дает 4 корня, модули которых растут пропорционально $|\tau|$:

$$\begin{aligned} \lambda_1^-(\tau) &\approx -\sqrt{\frac{\alpha_1}{c_1}} \tau, & \lambda_2^-(\tau) &\approx -\sqrt{\frac{\alpha_2}{c_2}} \tau, \\ \lambda_1^+(\tau) &\approx \sqrt{\frac{\alpha_1}{c_1}} \tau, & \lambda_2^+(\tau) &\approx \sqrt{\frac{\alpha_2}{c_2}} \tau. \end{aligned} \tag{4.2}$$

- 2) Разделим уравнение (4.1) на τ^4 :

$$\left(\frac{c_1\mu^2}{\tau^2} - \alpha_1\mu + 1\right) \left(\frac{c_2\mu^2}{\tau^2} - \alpha_2\mu + 1\right) = \varepsilon^2.$$

При $|\tau| \rightarrow \infty$ получаем уравнение $(1 - \alpha_1\mu)(1 - \alpha_2\mu) = \varepsilon^2$, корни которого равны:

$$\mu_{3,4} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \pm \sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4\alpha_1\alpha_2(1 - \varepsilon^2)}}{2\alpha_1\alpha_2}.$$

Это дает 4 корня, модули которых ограничены при $|\tau| \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lambda_3^-(\tau) &\approx -\sqrt{\mu_3}, & \lambda_4^-(\tau) &\approx -\sqrt{\mu_4}, \\ \lambda_3^+(\tau) &\approx \sqrt{\mu_3}, & \lambda_4^+(\tau) &\approx \sqrt{\mu_4}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

□

Следствие 1. Обозначим корни характеристического уравнения (4.1), лежащие в левой полуплоскости при $\operatorname{Re} \tau > 0$ через $\lambda_j^-(\tau)$, $j = 1, \dots, 4$. При этом $\lambda_1^-(\tau)$, $\lambda_2^-(\tau)$ удовлетворяют (4.2), $\lambda_3^-(\tau)$, $\lambda_4^-(\tau)$ удовлетворяют (4.3).

Тогда существует $\gamma'_0 \geq \gamma_0 > 0$ такое, что при τ , $\operatorname{Re} \tau > \gamma > \gamma'_0$, выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda_1^-(\tau) &\leq -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha_1}{c_1}}, & \operatorname{Re} \lambda_2^-(\tau) &\leq -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha_2}{c_2}}, \\ \operatorname{Re} \lambda_3^-(\tau) &\leq -\frac{1}{2}\sqrt{\mu_3}, & \operatorname{Re} \lambda_4^-(\tau) &\leq -\frac{1}{2}\sqrt{\mu_4}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

В дальнейшем мы будем считать, что γ'_0 определено в следствии 1.

§ 5. Построение решения краевой задачи

Пусть $\lambda_j(\tau)$ — собственные числа матрицы $A(\tau)$. В соответствии с результатами спектрального анализа, при $\operatorname{Re} \tau \geq \gamma > 0$ спектр матрицы $A(\tau)$ не пересекается с мнимой осью и разделяется на два изолированных подмножества (дихотомия спектра), каждое из которых содержит по 4 собственных числа (с учетом кратности), лежащих в левой ($\operatorname{Re} \lambda < 0$) и правой ($\operatorname{Re} \lambda > 0$) полуплоскостях соответственно.

Определим спектральный проектор Риса $P(\tau)$ на максимальное инвариантное подпространство, соответствующее части спектра в левой полуплоскости:

$$P(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_-} (\lambda I - A(\tau))^{-1} d\lambda,$$

где γ_- — замкнутый спрямляемый контур, лежащий в области $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda < 0\}$ и охватывающий все собственные числа матрицы $A(\tau)$ с отрицательной вещественной частью.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений на числовой прямой:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = A(\tau)y + F(\tau, x), & x \in \mathbb{R}, \\ \sup_{x \in \mathbb{R}} \|y(\tau, x)\| < \infty, \end{cases}$$

где τ , $\operatorname{Re} \tau > 0$ — фиксировано.

Используя дихотомию спектра, введем матричную функцию Грина $G(\tau, x)$ для системы дифференциальных уравнений на числовой прямой:

$$G(\tau, x) = \begin{cases} e^{xA(\tau)}P(\tau), & x > 0, \\ -e^{xA(\tau)}(I - P(\tau)), & x < 0. \end{cases}$$

Следовательно, проектор $P(\tau)$ выделяет компоненты решения, затухающие при $x \rightarrow +\infty$. Оператор $(I - P(\tau))$ является проектором на инвариантное подпространство, отвечающее собственным числам с $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

Решение краевой задачи (2.4) представим в виде следующей суммы:

$$y(\tau, x) = y_0(\tau, x) + y_1(\tau, x).$$

1. Частное решение неоднородной задачи $y_0(\tau, x)$ определяется интегралом типа свертки вектора правой части $F(\tau, x)$ с матричной функцией Грина $G(\tau, x)$ в следующем виде:

$$y_0(\tau, x) = \int_0^{+\infty} G(\tau, x-s)F(\tau, s) ds.$$

Учитывая определение $G(\tau, x)$, получаем выражение:

$$\begin{aligned} y_0(\tau, x) &= \int_0^x e^{(x-s)A(\tau)}P(\tau)F(\tau, s) ds \\ &\quad - \int_x^{+\infty} e^{(x-s)A(\tau)}(I - P(\tau))F(\tau, s) ds, \end{aligned} \tag{5.1}$$

(см., например, [4]). Из Леммы 4 (см. п. 6) вытекает сходимость интегралов на бесконечности за счет выбора соответствующих проекторов в подынтегральных выражениях.

2. Решение однородной задачи $y_1(\tau, x)$, затухающее на бесконечности, имеет вид:

$$y_1(\tau, x) = e^{xA(\tau)}T_-(\tau)\vec{c},$$

где $T_-(\tau)$ — матрица размера 8×4 , столбцы которой образуют базис максимального инвариантного подпространства, соответствующего собственным числам матрицы $A(\tau)$ с отрицательной вещественной частью, а $\vec{c}$ — произвольный вектор размерности 4×1 .

Для нахождения вектора $\vec{c}$ используется граничное условие $By(\tau, 0) = 0$. Тогда

$$By_1(\tau, 0) + By_0(\tau, 0) = 0.$$

Значения компонент решения в точке $x = 0$ определяются равенствами:

$$y_1(\tau, 0) = T_-(\tau)\vec{c}, \quad y_0(\tau, 0) = - \int_0^{+\infty} e^{-sA(\tau)}(I - P(\tau))F(\tau, s) ds.$$

Следовательно, нахождение вектора $\vec{c}$ сводится к решению алгебраической системы:

$$BT_-(\tau)\vec{c} = B \int_0^{+\infty} e^{-sA(\tau)}(I - P(\tau))F(\tau, s) ds.$$

Согласно условию Лопатинского, матрица $(BT_-(\tau))$ размера 4×4 является невырожденной при всех $\operatorname{Re} \tau > 0$. Таким образом, вектор $\vec{c}$ определяется единственным образом:

$$\vec{c} = [BT_-(\tau)]^{-1} B \int_0^{+\infty} e^{-sA(\tau)}(I - P(\tau))F(\tau, s) ds.$$

Итоговое интегральное представление решения краевой задачи (2.4) принимает вид:

$$\begin{aligned} y(\tau, x) = & \int_0^x e^{(x-s)A(\tau)} P(\tau) F(\tau, s) ds - \int_x^{+\infty} e^{(x-s)A(\tau)} (I - P(\tau)) F(\tau, s) ds \\ & + e^{xA(\tau)} T_-(\tau) [BT_-(\tau)]^{-1} B \int_0^{+\infty} e^{-sA(\tau)} (I - P(\tau)) F(\tau, s) ds. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Формула (5.2) позволяет установить явную зависимость решения от данных задачи и является основой для вывода оценок в соответствующих функциональных пространствах.

В дальнейшем будем полагать, что $T_-(\tau)$ — матрица с нормированными векторами, образующими базис в максимальном инвариантном подпространстве, соответствующем собственным значениям матрицы $A(\tau)$, лежащим в левой полуплоскости.

§ 6. Вспомогательные оценки

Для получения оценок решения в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+)$ приведем вспомогательные неравенства для матричных экспонент. Введем эрмитовы матрицы H_- и H_+ , определяемые следующим образом:

$$H_- = \int_0^{+\infty} (e^{sA} P)^* e^{sA} P ds,$$

$$H_+ = \int_0^{+\infty} (e^{-sA}(I - P))^* e^{-sA}(I - P) ds.$$

Эрмитова матрица $H = H_- + H_+ > 0$ является единственным решением матричного уравнения Ляпунова:

$$HA + A^*H = -P^*P + (I - P)^*(I - P),$$

удовлетворяющим условию

$$H = P^*HP + (I - P)^*H(I - P).$$

Напомним, что введенная ранее матрица P представляет собой проектор Рисса ($P^2 = P$), коммутирующий с матрицей A . Из этого непосредственно следует его коммутируемость с матричной экспонентой: $e^{sA}P = Pe^{sA}$ и $e^{sA}(I - P) = (I - P)e^{sA}$.

Также заметим, что:

- Если $v \in \text{Im } P$, то $(I - P)v = 0$. Следовательно, $Hv = H_-v$.
- Если $v \in \text{Im}(I - P)$, то $Pv = 0$. Следовательно, $Hv = H_+v$.

Замечание 2. В силу Леммы 2 и 3 при $\text{Re } \tau \geq \gamma > \gamma'_0$ имеем

$$\|H_+(\tau)\| = h_{\max}^+ \leq h^+ < \infty, \quad \|H_-(\tau)\| = h_{\max}^- \leq h^- < \infty,$$

где константы h^+ и h^- не зависят от τ .

Следующая лемма содержится в [8]–[10].

Лемма 4. При $x > 0$ справедливы следующие неравенства:

$$\|e^{xA}P\|^2 \leq \frac{\|H_-\|}{h_{\min}} e^{-x/\|H_-\|}, \quad (6.1)$$

$$\|e^{-xA}(I - P)\|^2 \leq \frac{\|H_+\|}{h_{\min}} e^{-x/\|H_+\|}, \quad (6.2)$$

где $h_{\min}$ — минимальное собственное значение матрицы H .

Лемма 5. Для решения краевой задачи (2.4) при $\text{Re } \tau \geq \gamma > \gamma'_0$ справедлива оценка

$$\|y(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \leq \mathcal{C}(\gamma'_0) \|F(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\|. \quad (6.3)$$

Доказательство. Используя интегральное представление (5.2), представим решение в виде суммы трех слагаемых:

$$y(\tau, x) = I_1(\tau, x) + I_2(\tau, x) + I_3(\tau, x),$$

где

$$I_1(\tau, x) = \int_0^x e^{(x-s)A(\tau)} P(\tau) F(\tau, s) ds,$$

$$I_2(\tau, x) = - \int_x^{+\infty} e^{(x-s)A(\tau)} (I - P(\tau)) F(\tau, s) ds,$$

$$I_3(\tau, x) = e^{xA(\tau)} T_-(\tau) [BT_-(\tau)]^{-1} B \int_0^{+\infty} e^{-sA(\tau)} (I - P(\tau)) F(\tau, s) ds.$$

По неравенству Минковского:

$$\|y, L_2(\mathbb{R}_+)\| \leq \|I_1, L_2(\mathbb{R}_+)\| + \|I_2, L_2(\mathbb{R}_+)\| + \|I_3, L_2(\mathbb{R}_+)\|. \quad (6.4)$$

Рассмотрим первые два слагаемых. Для проведения оценок запишем их в виде сверток, используя функцию Хевисайда:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Продолжим вектор-функцию правой части нулем на отрицательную полуось: $\tilde{F}(\tau, s) = \Theta(s)F(\tau, s)$. Тогда интеграл $I_1(\tau, x)$ можно записать в виде

$$I_1(\tau, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\Theta(x-s)e^{(x-s)A(\tau)} P(\tau)}_{K_1(\tau, x-s)} \cdot \underbrace{\Theta(s)F(\tau, s)}_{\tilde{F}(\tau, s)} ds.$$

Введем ядро $K_1(\tau, z) = \Theta(z)e^{zA(\tau)} P(\tau)$. Тогда $I_1(\tau, x) = (K_1 * \tilde{F})(x)$ и в силу неравенства Юнга имеем

$$\|I_1, L_2(\mathbb{R}_+)\| \leq \|K_1, L_1(\mathbb{R})\| \cdot \|\tilde{F}, L_2(\mathbb{R})\|.$$

Оценим L_1 -норму ядра K_1 , используя оценки Леммы 4:

$$\begin{aligned} \|K_1, L_1\| &= \int_0^{+\infty} \|e^{zA(\tau)} P(\tau)\| dz \leq \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{\|H_-(\tau)\|}{h_{\min}}} e^{-\frac{z}{2\|H_-(\tau)\|}} dz \\ &= \frac{2}{\sqrt{h_{\min}}} \cdot \|H_-(\tau)\|^{3/2}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$I_2(\tau, x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(s-x) e^{(x-s)A(\tau)} (I - P(\tau)) \tilde{F}(\tau, s) ds.$$

Вводя ядро $K_2(\tau, z) = \Theta(-z) e^{zA(\tau)} (I - P(\tau))$, в силу неравенства Юнга получаем:

$$\|I_2, L_2(\mathbb{R}_+)\| \leq \|K_2, L_1(\mathbb{R})\| \cdot \|F, L_2(\mathbb{R}_+)\|.$$

Используя оценки из Леммы 4, будем иметь

$$\begin{aligned} \|K_2, L_1(\mathbb{R})\| &= \int_{-\infty}^0 \|e^{zA(\tau)} (I - P(\tau))\| dz = \int_0^{+\infty} \|e^{-zA(\tau)} (I - P(\tau))\| dz \\ &= \frac{2}{\sqrt{h_{\min}}} \cdot \|H_+(\tau)\|^{3/2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим слагаемое $I_3(\tau, x) = e^{xA(\tau)} T_-(\tau) \vec{c}$, где вектор $\vec{c}$ имеет вид:

$$\vec{c} = [BT_-(\tau)]^{-1} B \int_0^{+\infty} e^{-sA(\tau)} (I - P(\tau)) F(\tau, s) ds.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского-Шварца и используя определение $H_+(\tau)$ как интегрального оператора, оценим норму этого вектора:

$$\begin{aligned} \|\vec{c}\| &\leq \|[BT_-(\tau)]^{-1} B\| \cdot \left(\int_0^{+\infty} \|e^{-sA(\tau)} (I - P(\tau))\|^2 ds \right)^{1/2} \\ &\cdot \left(\int_0^{+\infty} \|F(\tau, s)\|^2 ds \right)^{1/2} = \\ &= \|[BT_-(\tau)]^{-1} B\| \cdot \sqrt{\|H_+(\tau)\|} \cdot \|F, L_2(\mathbb{R}_+)\|. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Учитывая, что столбцы матрицы $T_-(\tau)$ лежат в области значений проектора Рисса $P(\tau)$, имеем $\|e^{xA(\tau)} T_-(\tau) \vec{c}\| \leq \|e^{xA(\tau)} P(\tau)\| \cdot \|T_-(\tau)\| \cdot \|\vec{c}\|$. Используя первое неравенство Леммы 4, получаем:

$$\begin{aligned} \|I_3, L_2(\mathbb{R}_+)\|^2 &= \int_0^{+\infty} \|e^{xA(\tau)} T_-(\tau) \vec{c}\|^2 dx \\ &\leq \|T_-(\tau)\|^2 \|\vec{c}\|^2 \int_0^{+\infty} \|e^{xA(\tau)} P(\tau)\|^2 dx \\ &\leq \|T_-(\tau)\|^2 \|\vec{c}\|^2 \cdot \frac{\|H_-(\tau)\|^2}{h_{\min}}. \end{aligned}$$

Тогда, учитывая условие Лопатинского и неравенство (6.5), получим

$$\|I_3, L_2\| \leq \frac{\|H_-(\tau)\|}{\sqrt{h_{\min}}} \|T_-(\tau)\| \|[BT_-(\tau)]^{-1} B\| \sqrt{\|H_+(\tau)\|} \|F, L_2\|$$

Подставляя полученные оценки в неравенство (6.4) и, учитывая Замечание 2 и условие (2.7), получаем при $\operatorname{Re} \tau \geq \gamma'_0$ оценку (6.3) с константой $\mathcal{C}(\gamma'_0) = C_1(\gamma'_0) + C_2(\gamma'_0) + C_3(\gamma'_0)$:

$$\begin{aligned} C_1(\gamma'_0) &= \frac{2}{\sqrt{h_{\min}}} (h_{\max}^-)^{3/2} \geq \frac{2}{\sqrt{h_{\min}}} \cdot \|H_-(\tau)\|^{3/2}; \\ C_2(\gamma'_0) &= \frac{2}{\sqrt{h_{\min}}} (h_{\max}^+)^{3/2} \geq \frac{2}{\sqrt{h_{\min}}} \cdot \|H_+(\tau)\|^{3/2}; \\ C_3(\gamma'_0) &= \frac{1}{\sqrt{h_{\min}}} h_{\max}^- \sqrt{h_{\max}^+} \tilde{c} \geq \frac{1}{\sqrt{h_{\min}}} \cdot \|H_-(\tau)\| \cdot \|H_+(\tau)\|^{1/2} \cdot \|T_-(\tau)\| \\ &\quad \cdot \|[BT_-(\tau)]^{-1}B\|. \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

§ 7. Оценки в анизотропных весовых соболевских пространствах

Оценка частного решения $y_0(\tau, x)$

В лемме 5 было показано, что при $\operatorname{Re} \tau \geq \gamma > \gamma'_0$ частное решение $y_0(\tau, x)$ принадлежит $L_2(\mathbb{R}_+)$. Это даёт возможность продолжить его нулём на отрицательную полуось, а затем применить преобразование Фурье по переменной x .

Продолжим вектор-функцию правой части $F(\tau, x)$ нулём при $x < 0$, обозначив продолжение через $\tilde{F}(\tau, x)$. Тогда интегральное представление (5.1) задаёт функцию $y_0(\tau, x)$ на всей числовой прямой $\mathbb{R}$, которая является решением системы первого порядка

$$\frac{dy_0}{dx} = A(\tau)y_0 + \tilde{F}(\tau, x), \quad x \in \mathbb{R},$$

причём $y_0(\tau, x) \in W_2^1(\mathbb{R})$, при любом τ , $\operatorname{Re} \tau \geq \gamma > \gamma'_0$. Выделим из вектора $y_0(\tau, x)$ первую и пятую компоненты и обозначим этот двумерный вектор через

$$v^0(\tau, x) = \begin{pmatrix} y_{0,1}(\tau, x) \\ y_{0,5}(\tau, x) \end{pmatrix}.$$

Тогда $v^0(\tau, x)$ удовлетворяет исходной системе из (2.3) на всей прямой с продолженной правой частью $\tilde{g}(\tau, x)$ (где $\tilde{g}(\tau, x)$ получено продолжением $g(\tau, x)$ нулём при $x < 0$):

$$\tau^2 \begin{pmatrix} 1 - \alpha_1 D_x^2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 - \alpha_2 D_x^2 \end{pmatrix} v^0 + \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} D_x^4 v^0 = \tilde{g}(\tau, x). \quad (7.1)$$

Применим к этой системе преобразование Фурье $\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}$. Обозначим $\hat{v}^0(\tau, \xi) = \mathcal{F}[v^0]$, $\hat{g}(\tau, \xi) = \mathcal{F}[\tilde{g}]$. Получаем алгебраическую систему:

$$(\tau^2 M(\xi) + \xi^4 C) \hat{v}^0 = \hat{g}(\tau, \xi), \quad (7.2)$$

где

$$M(\xi) = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 \xi^2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 + \alpha_2 \xi^2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Лемма 6. *Существуют постоянные $\gamma_1 > 0$, $C_0 > 0$ такие, что для всех τ с $\operatorname{Re} \tau \geq \gamma \geq \gamma_1 \geq \gamma_0$, всех $\xi \in \mathbb{R}$ и всех векторов $w \in \mathbb{C}^2$ выполнено неравенство*

$$\|(\tau^2 M(\xi) + \xi^4 C)w\| \geq C_0 \gamma (1 + \xi^2) (|\tau| + |\xi|) \|w\|. \quad (7.3)$$

Доказательство. Сначала установим равномерную положительную определённости матрицы $M(\xi)$. Для любого $w = (w_1, w_2)^T \in \mathbb{C}^2$ имеем

$$w^* M w = |w_1|^2 + |w_2|^2 + \xi^2 (\alpha_1 |w_1|^2 + \alpha_2 |w_2|^2) + 2\varepsilon \operatorname{Re}(w_1 \overline{w_2}).$$

Воспользуемся неравенством

$$2\varepsilon \operatorname{Re}(w_1 \overline{w_2}) \geq -2\varepsilon |w_1| |w_2| \geq -\varepsilon (|w_1|^2 + |w_2|^2).$$

Тогда

$$w^* M w \geq (1 - \varepsilon) (|w_1|^2 + |w_2|^2) + \xi^2 (\alpha_1 |w_1|^2 + \alpha_2 |w_2|^2).$$

Обозначим $\alpha_{\min} = \min(\alpha_1, \alpha_2) > 0$. Тогда

$$w^* M w \geq (1 - \varepsilon + \alpha_{\min} \xi^2) \|w\|^2.$$

Выберем $m_0 = \min(1 - \varepsilon, \alpha_{\min})$. Легко проверить, что $m_0(1 + \xi^2) \leq 1 - \varepsilon + \alpha_{\min} \xi^2$ при всех $\xi \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$w^* M(\xi) w \geq m_0(1 + \xi^2) \|w\|^2, \quad w \in \mathbb{C}^2, \xi \in \mathbb{R}. \quad (7.4)$$

Теперь перейдём непосредственно к оценке символа. Для произвольного $w \in \mathbb{C}^2$ рассмотрим квадратичную форму с множителем $\bar{\tau}$:

$$\bar{\tau}(\tau^2 M + \xi^4 C) = |\tau|^2 \tau M + \bar{\tau} \xi^4 C.$$

Умножим это выражение скалярно на w :

$$w^* (\bar{\tau}(\tau^2 M + \xi^4 C)) w = |\tau|^2 \tau (w^* M w) + \bar{\tau} \xi^4 (w^* C w). \quad (7.5)$$

Матрицы M и C вещественны и симметричны, поэтому величины w^*Mw и w^*Cw вещественны. Выделим вещественную часть:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[w^*(\bar{\tau}(\tau^2 M + \xi^4 C))w] &= |\tau|^2(\operatorname{Re} \tau)(w^*Mw) + \xi^4(\operatorname{Re} \bar{\tau})(w^*Cw) \\ &= \sigma(|\tau|^2 w^*Mw + \xi^4 w^*Cw),\end{aligned}$$

где $\sigma = \operatorname{Re} \tau > 0$.

С другой стороны,

$$\operatorname{Re}[w^*(\bar{\tau}(\tau^2 M + \xi^4 C))w] \leq |w^*(\bar{\tau}(\tau^2 M + \xi^4 C))w| \leq |\tau| \|w\| \|(\tau^2 M + \xi^4 C)w\|.$$

Сравнивая два выражения, получаем

$$|\tau| \|w\| \|(\tau^2 M + \xi^4 C)w\| \geq \sigma(|\tau|^2 w^*Mw + \xi^4 w^*Cw).$$

Учитывая, что $\sigma \geq \gamma$, и подставляя оценки (7.4) и $w^*Cw \geq c_{\min}\|w\|^2$ (где $c_{\min} = \min(c_1, c_2) > 0$), приходим к неравенству

$$\|(\tau^2 M(\xi) + \xi^4 C)w\| \geq \gamma \left(m_0 |\tau| (1 + \xi^2) + c_{\min} \frac{\xi^4}{|\tau|} \right) \|w\|. \quad (7.6)$$

Осталось показать, что выражение в скобках оценивается снизу через $C_0(1 + \xi^2)(|\tau| + |\xi|)$ с некоторой постоянной $C_0 > 0$, не зависящей от τ и ξ . Рассмотрим два случая.

Случай 1: $|\tau| \geq |\xi|$. Тогда

$$m_0 |\tau| (1 + \xi^2) + c_{\min} \frac{\xi^4}{|\tau|} \geq m_0 |\tau| (1 + \xi^2) = \frac{m_0}{2} |\tau| (1 + \xi^2) + \frac{m_0}{2} |\tau| (1 + \xi^2).$$

Поскольку $|\tau| \geq |\xi|$, второе слагаемое можно оценить как $\frac{m_0}{2} |\tau| (1 + \xi^2) \geq \frac{m_0}{2} |\xi| (1 + \xi^2)$. Следовательно,

$$m_0 |\tau| (1 + \xi^2) + c_{\min} \frac{\xi^4}{|\tau|} \geq \frac{m_0}{2} (1 + \xi^2) (|\tau| + |\xi|).$$

Случай 2: $|\tau| < |\xi|$. Разобьём первое слагаемое пополам:

$$m_0 |\tau| (1 + \xi^2) + c_{\min} \frac{\xi^4}{|\tau|} = \frac{m_0}{2} |\tau| (1 + \xi^2) + \frac{m_0}{2} |\tau| (1 + \xi^2) + c_{\min} \frac{\xi^4}{|\tau|}.$$

Поскольку $|\tau| \geq \sigma \geq \gamma_1 \geq \gamma_0$, имеем $\frac{m_0}{2} |\tau| (1 + \xi^2) \geq \frac{m_0 \gamma_0}{2} (1 + \xi^2)$. Кроме того, из $|\tau| < |\xi|$ вытекает $\frac{\xi^4}{|\tau|} \geq |\xi|^3$. Таким образом,

$$m_0 |\tau| (1 + \xi^2) + c_{\min} \frac{\xi^4}{|\tau|} \geq \frac{m_0}{2} |\tau| (1 + \xi^2) + \left(\frac{m_0 \gamma_0}{2} (1 + \xi^2) + c_{\min} |\xi|^3 \right).$$

Оценим выражение в скобках. Если $|\xi| \geq 1$, то $c_{\min}|\xi|^3 = c_{\min}|\xi|\xi^2 \geq \frac{c_{\min}}{2}|\xi|(1+\xi^2)$. Если же $|\xi| < 1$, то $\frac{m_0\gamma_0}{2}(1+\xi^2) \geq \frac{m_0\gamma_0}{2}|\xi|(1+\xi^2)$. Выберем $\tilde{C}_0 = \min(\frac{c_{\min}}{2}, \frac{m_0\gamma_0}{2}) > 0$; тогда в обоих подслучаях

$$\frac{m_0\gamma_0}{2}(1+\xi^2) + c_{\min}|\xi|^3 \geq \tilde{C}_0|\xi|(1+\xi^2).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} m_0|\tau|(1+\xi^2) + c_{\min}\frac{\xi^4}{|\tau|} &\geq \frac{m_0}{2}|\tau|(1+\xi^2) + \tilde{C}_0|\xi|(1+\xi^2) \\ &\geq \min\left(\frac{m_0}{2}, \tilde{C}_0\right)(1+\xi^2)(|\tau| + |\xi|). \end{aligned}$$

Объединяя случаи 1 и 2, положим

$$C_0 = \min\left\{\frac{m_0}{2}, \frac{c_{\min}}{2}, \frac{m_0\gamma_0}{2}\right\} > 0.$$

Тогда в обоих случаях выполнено

$$m_0|\tau|(1+\xi^2) + c_{\min}\frac{\xi^4}{|\tau|} \geq C_0(1+\xi^2)(|\tau| + |\xi|).$$

Подставляя эту оценку в (7.6), получаем требуемое неравенство (7.3).

Лемма доказана. $\square$

Из леммы немедленно вытекает, что матрица

$$L(\tau, \xi) = \tau^2 M(\xi) + \xi^4 C$$

обратима при $\operatorname{Re} \tau \geq \gamma > \gamma_1 > 0$, $\xi \in \mathbb{R}$, причем

$$\|L(\tau, \xi)^{-1}\| \leq \frac{1}{C_0\gamma} \frac{1}{(1+\xi^2)(|\tau| + |\xi|)}.$$

Следовательно, для решения $\hat{v}^0(\tau, \xi) = L^{-1}\hat{g}(\tau, \xi)$ справедлива оценка

$$\|\hat{v}^0(\tau, \xi)\| \leq \frac{1}{C_0\gamma} \frac{\|\hat{g}(\tau, \xi)\|}{(1+\xi^2)(|\tau| + |\xi|)}. \quad (7.7)$$

В силу равенства Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|D_x^{\alpha_2} v^0(\tau, x)\|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi|^{2\alpha_2} \|\hat{v}^0(\tau, \xi)\|^2 d\xi, \quad \alpha_2 = 0, \dots, 4.$$

Поэтому квадрат нормы $\|v^0, \widehat{W}_2^{2,4}(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R})\|$ для функции на всей прямой эквивалентен сумме по всем мультииндексам $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ с $\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{4} \leq 1$ выражений

$$\sup_{\sigma > \gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^{2\alpha_1} |\xi|^{2\alpha_2} \|\hat{v}^0(\tau, \xi)\|^2 d\xi d\eta, \quad \tau = \sigma + i\eta, \operatorname{Re} \tau > \gamma \geq \gamma_1. \quad (7.8)$$

- При $\alpha = (0, 4)$, используя (7.7), получаем

$$\sup_{\sigma > \gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^8 \|\hat{v}^0\|^2 d\xi d\eta \leq \frac{1}{C_0^2 \gamma^2} \sup_{\sigma > \gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \xi^2) \|\hat{g}\|^2 d\xi d\eta.$$

- При $\alpha = (0, 0)$, очевидно, имеем

$$\sup_{\sigma > \gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{v}^0\|^2 d\xi d\eta \leq \frac{1}{C_0^2 \gamma^4} \sup_{\sigma > \gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \xi^2) \|\hat{g}\|^2 d\xi d\eta.$$

- При $\alpha = (1, 2)$, из (7.7) следует

$$\frac{|\tau|^2 |\xi|^4}{(1 + \xi^2)^2 (|\tau| + |\xi|)^2} = \frac{|\xi|^4}{(1 + \xi^2)^2} \left(\frac{|\tau|}{|\tau| + |\xi|} \right)^2 \leq \frac{|\xi|^4}{(1 + \xi^2)^2} \leq 1 \leq 1 + \xi^2.$$

Поэтому

$$\sup_{\sigma > \gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^2 |\xi|^4 \|\hat{v}^0\|^2 d\xi d\eta \leq \frac{1}{C_0^2 \gamma^2} \sup_{\sigma > \gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \xi^2) \|\hat{g}\|^2 d\xi d\eta.$$

- При $\alpha = (1, 1)$ имеем такую же оценку.
- При $\alpha = (2, 0)$ непосредственное применение (7.7) приводит к множителю $\frac{|\tau|^2}{(1 + \xi^2)^2}$ в (7.8).

Поэтому, чтобы обойти эту трудность, выразим $\tau^2 \hat{v}^0(\tau, \xi)$ непосредственно из системы (7.2):

$$\tau^2 \hat{v}^0(\tau, \xi) = M(\xi)^{-1} \hat{g}(\tau, \xi) - \xi^4 M(\xi)^{-1} C \hat{v}^0(\tau, \xi).$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\tau|^2 \|\hat{v}^0(\tau, \xi)\| &\leq \|M(\xi)^{-1}\| \|\hat{g}(\tau, \xi)\| + \xi^4 \|M(\xi)^{-1}\| \|C\| \|\hat{v}^0(\tau, \xi)\| \\ &\leq \frac{1}{m_0(1 + \xi^2)} \|\hat{g}(\tau, \xi)\| + \frac{c_{\max} \xi^4}{m_0(1 + \xi^2)} \|\hat{v}^0(\tau, \xi)\|, \end{aligned}$$

где $c_{\max} = \max(c_1, c_2)$.

Следовательно, как при рассмотрении случая $\alpha = (0, 4)$, получаем

$$\begin{aligned} \sup_{\sigma > \gamma} \iint_{\mathbb{R}^2} |\tau|^4 \|\hat{v}^0(\tau, \xi)\|^2 d\xi d\eta &\leq \left(\frac{2}{m_0^2} + \frac{2c_{\max}^2}{m_0^2 C_0^2 \gamma^2} \right) \\ &\quad \times \sup_{\sigma > \gamma} \iint_{\mathbb{R}^2} (1 + \xi^2) \|\hat{g}(\tau, \xi)\|^2 d\xi d\eta. \end{aligned}$$

- Остальные мультииндексы $(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0)$ оцениваются аналогично. Поэтому для каждого из них справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \sup_{\sigma > \gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^{2\alpha_1} |\xi|^{2\alpha_2} \|\hat{v}^0(\tau, \xi)\|^2 d\xi d\eta \\ & \leq \tilde{c}(\gamma) \sup_{\sigma > \gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \xi^2) \|\hat{g}(\tau, \xi)\|^2 d\xi d\eta \end{aligned}$$

с некоторой постоянной $\tilde{c}(\gamma) > 0$.

Суммируя полученные оценки по всем допустимым мультииндексам α , приходим к неравенству

$$\|v^0(\tau, x), \widetilde{W}_2^{2,4}(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R})\| \leq c_0(\gamma) \|\tilde{g}(\tau, x), \widetilde{W}_2^{0,1}(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R})\|.$$

Поскольку функция $\tilde{g}(\tau, x)$ получена продолжением нулём функции $g(\tau, x)$ на $\mathbb{R}$, их нормы в $\widetilde{W}_2^{0,1}(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+)$ совпадают. Следовательно,

$$\|v^0(\tau, x), \widetilde{W}_2^{2,4}(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+)\| \leq c_0(\gamma) \|g(\tau, x), \widetilde{W}_2^{0,1}(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+)\|. \quad (7.9)$$

Оценка частного решения $y_1(\tau, x)$

Напомним, что частное решение $y_1(\tau, x)$ записывается в виде

$$y_1(\tau, x) = -e^{xA(\tau)} T_-(\tau) (BT_-(\tau))^{-1} B y_0(\tau, 0). \quad (7.10)$$

Матрица B имеет следующую структуру:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$B y_0(\tau, 0) = \begin{pmatrix} a_{11} y_0^1(\tau, 0) + a_{12} D_x y_0^1(\tau, 0) \\ a_{21} y_0^1(\tau, 0) + a_{22} D_x y_0^1(\tau, 0) \\ b_{11} y_0^2(\tau, 0) + b_{12} D_x y_0^2(\tau, 0) \\ b_{21} y_0^2(\tau, 0) + b_{22} D_x y_0^2(\tau, 0) \end{pmatrix},$$

где для краткости обозначено $y_0^1 = y_{0,1}$, $y_0^2 = y_{0,5}$.

По теореме вложения Соболева $W_2^1(\mathbb{R}_+) \hookrightarrow \dot{C}(\mathbb{R}_+)$, поэтому для любой функции $w(\tau, x) \in W_2^1(\mathbb{R}_+)$

$$|w(\tau, 0)| \leq C_S \|w(\tau, \cdot), W_2^1(\mathbb{R}_+)\|.$$

Применяя это к y_0^1 , $D_x y_0^1$, y_0^2 , $D_x y_0^2$, получаем

$$\begin{aligned} |a_{11}y_0^1(\tau, 0) + a_{12}D_x y_0^1(\tau, 0)| &\leq c_1 \|y_0^1, W_2^1(\mathbb{R}_+)\| + c_2 \|D_x y_0^1, W_2^1(\mathbb{R}_+)\| \\ &\leq c \|y_0^1, W_2^2(\mathbb{R}_+)\|. \end{aligned}$$

Аналогичная оценка верна для компонент с y_0^2 . Следовательно,

$$\begin{aligned} \|By_0(\tau, 0)\| &\leq C_1 (\|y_0^1, W_2^2(\mathbb{R}_+)\| + \|y_0^2, W_2^2(\mathbb{R}_+)\|) \\ &\leq C_1 (\|y_0^1, W_2^2(\mathbb{R})\| + \|y_0^2, W_2^2(\mathbb{R})\|). \end{aligned} \quad (7.11)$$

Используя эквивалентную нормировку и оценку (7.7), полученную для $\hat{v}^0 = (\hat{y}_0^1, \hat{y}_0^2)^T$, находим

$$\begin{aligned} \|y_0^j, W_2^2(\mathbb{R})\| &= \|(1 + \xi^2)\hat{y}_0^j(\tau, \xi), L_2(\mathbb{R})\| \\ &\leq \frac{c}{\gamma} \left\| \frac{1}{|\xi| + |\tau|} \|\hat{g}(\tau, \xi)\|, L_2(\mathbb{R}) \right\|, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Подставляя это в (7.11), окончательно получаем

$$\|By_0(\tau, 0)\| \leq \frac{C_2}{\gamma} \left\| \frac{\|\hat{g}(\tau, \xi)\|}{|\xi| + |\tau|}, L_2(\mathbb{R}) \right\|. \quad (7.12)$$

Из явного вида (7.10), оценки (7.11), Леммы 4 и условия (2.7) вытекает

$$\|y_1(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \leq \frac{\tilde{C}}{\gamma} \left\| \frac{\|\hat{g}(\tau, \xi)\|}{|\xi| + |\tau|}, L_2(\mathbb{R}) \right\|. \quad (7.13)$$

Напомним, что вектор y_1 составлен из компонент

$$y_1 = (v_1^1, D_x v_1^1, D_x^2 v_1^1, D_x^3 v_1^1, v_2^1, D_x v_2^1, D_x^2 v_2^1, D_x^3 v_2^1)^T,$$

поэтому из (7.13) сразу получаются L_2 -оценки для $D_x^k v_1^1$ и $D_x^k v_2^1$ при $k = 0, 1, 2, 3$ с той же правой частью.

Дифференцируя (7.10) по x , имеем

$$D_x y_1(\tau, x) = e^{xA(\tau)} A(\tau) T_-(\tau) (BT_-(\tau))^{-1} By_0(\tau, 0).$$

Учитывая структуру матрицы $A(\tau)$, получаем

$$\|D_x y_1(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \leq \tilde{C}_1 \frac{c}{\gamma} \left\| \frac{|\tau|^2}{|\xi| + |\tau|} \|\hat{g}(\tau, \xi)\|, L_2(\mathbb{R}) \right\|. \quad (7.14)$$

Аналогично,

$$\| |\tau|^2 y_1(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \leq \tilde{C}_2 \frac{c}{\gamma} \left\| \frac{|\tau|^2}{|\xi| + |\tau|} \|\hat{g}(\tau, \xi)\|, L_2(\mathbb{R}) \right\|. \quad (7.15)$$

Из оценок (7.13)–(7.15) непосредственно следует, что для любого $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ с $\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{4} \leq 1$ выполнено

$$\begin{aligned} & \sup_{\sigma > \gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |\tau|^{2\alpha_1} \|D_x^{\alpha_2} v^1(\tau, x)\|^2 dx d\eta \\ & \leq \frac{C_\alpha^2}{\gamma^2} \sup_{\sigma > \gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + |\tau|^4}{(|\tau| + |\xi|)^2} \|\hat{g}(\tau, \xi)\|^2 d\xi d\eta \\ & \leq \frac{\tilde{C}_\alpha}{\gamma^2} \sup_{\sigma > \gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\tau|^2) \|\hat{g}(\tau, \xi)\|^2 d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|v^1(\tau, x), \widetilde{W}_2^{2,4}(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+)\| \leq c_1(\gamma) \|g(\tau, x), \widetilde{W}_2^{1,0}(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+)\|. \quad (7.16)$$

§ 8. Доказательство теоремы

Заметим, что из явного интегрального представления (5.2) непосредственно видно, что $y(\tau, x)$ является аналитической функцией параметра τ в полуплоскости $\operatorname{Re} \tau > \gamma$.

Решение задачи (2.3) задается суммой:

$$v(\tau, x) = v^0(\tau, x) + v^1(\tau, x).$$

Согласно итоговым оценкам (7.9) и (7.16), при $\gamma > \gamma_1$ имеем

$$\|v(\tau, x), \widetilde{W}_2^{2,4}\| \leq c_0(\gamma) \|g(\tau, x), \widetilde{W}_2^{0,1}\| + c_1(\gamma) \|g(\tau, x), \widetilde{W}_2^{1,0}\|,$$

$$\|v(\tau, x), \widetilde{W}_2^{2,4}(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+)\| \leq C(\gamma) \|g(\tau, x), \widetilde{W}_2^{1,1}(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+)\|. \quad (8.1)$$

Из оценки (8.1) и аналитичности функции $y(\tau, x)$ в силу обобщенной теоремы Пэли-Винера получаем, что вектор-функция

$$u(t, x) = \mathcal{L}_{\tau \rightarrow t}^{-1}[v(\cdot, x)] \in W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2), \quad \gamma > \gamma_1,$$

является решением исходной смешанной краевой задачи и для него справедливо неравенство:

$$\|u(t, x), W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)\| + \|D_t^2 D_x^2 u(t, x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^2)\| \leq c(\gamma_1) \|f(t, x), W_{2,\gamma}^{1,1}(\mathbb{R}_{++}^2)\|,$$

где константа $c(\gamma_1) > 0$ не зависит от функции $f(t, x)$.

Здесь обратный оператор Лапласа действует по следующему правилу:

$$\mathcal{L}^{-1}[v](t, x) = e^{\operatorname{Re} \tau t} \mathcal{F}^{-1}[v](t, x),$$

где $\mathcal{F}^{-1}$ — обратный оператор Фурье, действующий по переменной $\eta = \operatorname{Im} \tau$.

Единственность решения в пространстве $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$ вытекает из условия Лопатинского.

Теорема доказана. $\square$

Список литературы

1. Соболев С. Л. *Избранные труды. Т. 1. Уравнения математической физики. Вычислительная математика и кубатурные формулы.* Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, филиал «Гео» изд-ва СО РАН, 2003.
2. Власов В. З. *Тонкостенные упругие стержни.* М.: Физматгиз, 1959.
3. Герасимов С. И., Ерофеев В. И. *Задачи волновой динамики элементов конструкций.* Саров: ФГУП РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2014.
4. Демиденко Г. В., Успенский С. В. *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной.* Новосибирск: Научная книга, 1998.
5. Соболев С. Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* М.: Наука, 1988.
6. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения.* М.: Физматлит, 1996.
7. Демиденко Г. В. *Пространства Соболева и обобщенные решения.* Новосибирск: РИЦ НГУ, 2015.
8. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* М.: Наука, 1970.
9. Годунов С. К. *Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.* Новосибирск: Издательство Новосибирского университета, 1994.
10. Демиденко Г. В. *Матричные уравнения: учебное пособие.* Новосибирск: РИЦ НГУ, 2009.

References

1. Sobolev S. L. *Selected Works*. Vol. 1: *Equations of Mathematical Physics, Computational Mathematics, and Cubature Formulas*. Ed. by G. V. Demidenko, V. L. Vaskevich. Springer, New York, 2006.
2. Vlasov V. Z. *Thin-walled Elastic Beams*. National Science Foundation, Washington, D.C., 1961.
3. Gerasimov S. I., Erofeev V. I. *Problems of wave dynamics for structural elements* [in Russian]. Ross. Fed. Yad. Tsentr-Vseross. Nauchn.-Issled. Inst. Eksp. Fiz., Sarov, 2014.
4. Demidenko G. V., Uspenskii S. V. *Partial Differential Equations and Systems Not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative*. Marcel Dekker, New York and Basel, 2003.
5. Sobolev S. L. *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 90, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991.
6. Besov O. V., Il'in V. P., Nikol'skii S. M. *Integral Representations of Functions and Embedding Theorems* [in Russian]. Fizmatlit, Moscow, 1996.
7. Demidenko G. V. *Sobolev Spaces and Generalized Solutions* [in Russian]. Publishing office of the Novosibirsk State University, Novosibirsk, 2015.
8. Daleckii Ju. L., Krein M. G. *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space*. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 43, American Mathematical Society, Providence, RI, 1974.
9. Godunov S. K. *Ordinary Differential Equations with Constant Coefficients*. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 169, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
10. Demidenko G. V. *Matrix Equations: Textbook* [in Russian]. RIC NSU, Novosibirsk, 2009.

Информация об авторе

Геннадий Владимирович Демиденко, доктор физико-математических наук, профессор

SPIN 7719-1669 AuthorID: 2077

Scopus Author ID 6701652666

ISSN 1560-750X (Print) ISSN 3033-8271 (Online)
Математические труды, 2026, Том 29, № 3, С. 19-46
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 3, P. 19-46

Кристина Дмитриевна Ивлева, магистрант

Author Information

Gennadii V. Demidenko, Doctor of Mathematics, Professor

SPIN 7719-1669 AuthorID: 2077

Scopus Author ID 6701652666

Kristina D. Ivleva, Master's degree student

*Статья поступила в редакцию 02.07.2026;
одобрена после рецензирования 04.08.2026; принята к публикации
06.08.2026*

*The article was submitted 02.07.2026;
approved after reviewing 04.08.2026; accepted for publication 06.08.2026*